

RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA - UFRGS 2019

26. Resposta (D)

I. Falsa

O número 2 é o único primo par.

II. Correta

Se a é um número múltiplo de 3, e $2a$ sendo um número par, logo múltiplo de 2. Então $2a$ é múltiplo de 6.

III. Correta

Se a é um número par, então a^2 é um número par, pois multiplicação entre pares sempre resultará em um número par.

27. Resposta (D)

Dados $Z_1 = 2 - i$ e $Z_2 = 3 + xi$, temos que:

$$Z_1 \cdot Z_2 = (2 - i) \cdot (3 + xi)$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = 6 + 2xi - 3i - xi^2$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = 6 + x + (2x - 3)i$$

Como $Z_1 \cdot Z_2$ pertence aos reais a parte imaginária dele é nula, ou seja,

$$2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

28. Resposta (E)

Resolvendo as operações dentro dos parênteses, chegamos nessas multiplicações onde os numeradores e denominadores de números lado a lado se anulam, sobrando apenas o primeiro denominador e o último numerador.

$$\left(\frac{1}{2} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{3} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{4} + 1\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{1000} + 1\right) = \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{4}{3}\right) \cdot \left(\frac{5}{4}\right) \cdot \left(\frac{6}{5}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1001}{1000}\right) = \frac{1001}{2}$$

29. Resposta (D)

I. Falsa

Se pegarmos $a = 3$ e $b = 2$ e o expoente $x = -1$ teremos o seguinte resultado

$$3^{-1} < 2^{-1} = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$$

II. Correta

Considerando $a=4$ e $b = 2$, teremos então

$$\frac{1}{4} < \frac{2}{4+2} < \frac{1}{2} = \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$$

III. Correta

Como a e b são números reais positivos quaisquer e $a > b$, logo $\sqrt{a} > \sqrt{b}$

30. Resposta (B)

I. Falsa

Não podemos afirmar, pois se considerarmos $f(x) = ax + b$ e esse coeficiente b for negativo, podemos ter uma $f(x) < 0$

II. Correta

Se x é zero da função (a raiz dela), $f(x) = 0$.

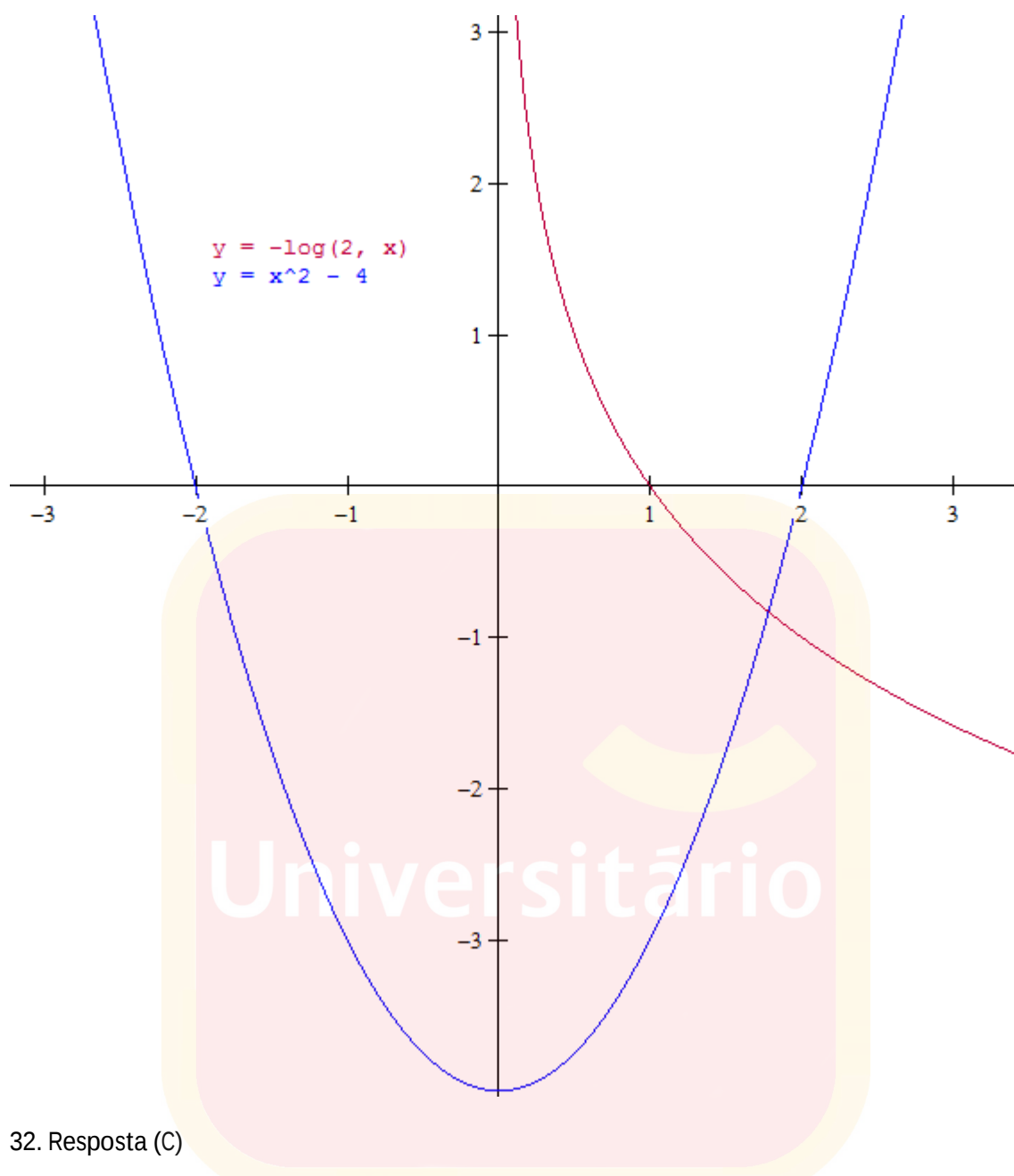
III. Falsa

Não temos informação suficiente para comprovar que a desigualdade é verdadeira. Precisaria ser dado as equações das funções.

31. Resposta (B)

Achando as raízes de $f(x) = -\log_2 x$ e de $g(x) = x^2 - 4$, vemos que o ponto de interseção entre essas funções se dá no intervalo entre $[1, 2]$

Universitário



32. Resposta (C)

Para a soma de todos os números ímpares menores do que 100, deve saber que estamos somando 50 números ímpares, logo seguindo a lógica

$$1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 99 = 50^2$$

33. Resposta (E)

Considerando $f(x) = 2^{x-1}$, temos uma função exponencial crescente, pois a base da exponencial é maior do que 1. E em toda função exponencial a imagem é uma progressão geométrica.

34. Resposta (A)

$$\text{O valor de } E = \log\left(\frac{1}{2}\right) + \log\left(\frac{2}{3}\right) + \dots + \log\left(\frac{999}{1000}\right)$$

Usando a propriedade de logaritmos onde juntamos várias somas em um único logaritmo multiplicando os logaritmandos, obtemos

$$E = \log \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{998}{999} \cdot \frac{999}{1000}$$

Onde simplificando os denominadores com os numeradores da próxima fração, nos restará apenas o primeiro numerador e o último denominador, então

$$\log \frac{1}{1000} = \log 1000^{-1} = \log(10^3)^{-1} = \log 10^{-3} = -3 \cdot \log 10 = -3 \cdot 1 = -3$$

35. Resposta (B)

$f(x - 3)$: Subtrair três unidades em x desloca o gráfico três unidades para a direita;

$|f(x - 3)|$: O módulo, na função, torna todos os valores negativos de y positivos, a porção do gráfico abaixo do eixo x fica refletida para cima;

$|f(x - 3)| + 2$: Adicionar duas unidades na função desloca todo o gráfico duas unidades para cima.

36. Resposta (E)

A soma dos coeficientes de um polinômio é igual ao $P(1)$.

$$P(1) = (1 - 1 + 1^2 - 1^3 + 1^4)^{1000} = (1)^{1000} = 1$$

37. Resposta (C)

Como o arco AM mede 90° e o arco AN mede 30° , temos que o arco MN mede 150° . Por outro lado, temos também que os segmentos $OM = ON = 1$, pois são raios da circunferência. Dessa forma, em relação ao triângulo OMN temos pela lei dos cossenos que:

$$(MN)^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(150^\circ)$$

$$(MN)^2 = 2 + 2 \cdot \cos(30^\circ)$$

$$(MN)^2 = 2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(MN) = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

38. Resposta (B)

Os valores máximo e mínimo que a função seno assume são 1 e -1 .

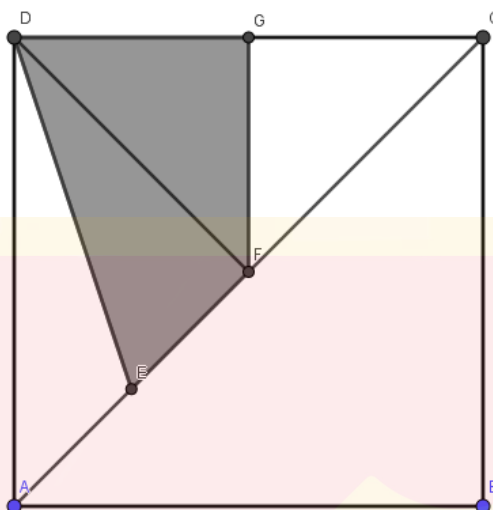
$$\text{Máximo da função: } 3 - 5(-1) = 3 + 5 = 8$$

Mínimo da função: $3 - 5(1) = -2$

O período da função seno é 2π , o período de uma função $f(x) = \text{sen}(kx)$ é $\frac{2\pi}{k}$.

Logo, o período de $f(x) = 3 - 5\text{sen}(2x + 4)$ é $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

39. Resposta (A)



O triângulo ADC é $\frac{1}{2}$ da área do quadrado. O segmento FD divide o triângulo ADC ao meio, dando origem a dois triângulos de área $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ da área do quadrado, o segmento FG divide o triângulo DCF em dois triângulos de mesma área, ou seja, a área do triângulo DFG é $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ da área do quadrado. O segmento FD divide o triângulo ADC ao meio, dando origem a dois triângulos de área $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ da área do quadrado, o segmento ED divide o triângulo DAF em dois triângulos de mesma área, ou seja, a área do triângulo DEG é $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ da área do quadrado. A área pintada é a soma das áreas dos triângulos DFG e DEG: $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ da área do quadrado.

40. Resposta (C)

Com base na figura, o quadrilátero ABCD é um losango formado pelos lados dos hexágonos regulares. Por outro lado, temos que o segmento DB divide os ângulos

$ABC = ADC = 120^\circ$ ($ABF + CBF = 120^\circ + 120^\circ = 240^\circ$) em dois ângulos de 60° . Dessa forma concluímos que o losango é formado por dois triângulos equiláteros.

Sabemos também que um hexágono regular é formado por seis triângulos equiláteros. Assim, se um hexágono regular tem área 48 cm^2 , dois triângulos equiláteros terão área 16 cm^2 . Portanto, a área do losango ABCD é 16 cm^2 .

41. Resposta (A)

Supondo que os segmentos HG, GB e GF meçam, respectivamente, a, b e c, temos que o volume da pirâmide mede $V_1 = \frac{\frac{a \cdot b}{2} \cdot c}{3}$. O que implica em $V_1 = \frac{abc}{6}$.

Por outro lado, temos que o volume do paralelepípedo mede $V_2 = abc$. Assim, temos que:

$$V_1 = \frac{abc}{6} \rightarrow V_1 = \frac{V_2}{6} \rightarrow V_1/V_2 = 1/6$$

42. Resposta (D)

O volume do sólido gerado pela revolução do retângulo em torno da reta r corresponde a diferença entre o volume do cilindro V_g grande de raio $R_g = 5$ pelo volume do cilindro pequeno V_p de raio $R_p = 2$

Por outro lado, em relação ao triângulo retângulo DCB, temos que $DC = 5 - 2 = 3$ e $DB = 5$. Assim, por Pitágoras temos que:

$$5^2 = 3^2 + (BC)^2 \rightarrow BC = 4$$

O segmento $BC = 4$ corresponde a altura dos dois cilindros.

Determinando a diferença entre os volumes dos cilindros temos que: $V_g - V_p = \pi \cdot 5^2 \cdot 4 - \pi \cdot 2^2 \cdot 4 \rightarrow V_g - V_p = 100\pi - 16\pi = 84\pi$.

43. Resposta (C)

Analisando a figura vemos que o segmento HP corresponde a metade da diagonal do quadrado de lado 2, ou seja, $HP = \sqrt{2}$. Assim, como o triângulo retângulo AHP possui catetos de medidas $HP = \sqrt{2}$ e $HA = 2$, temos por Pitágoras

$$(AP)^2 = 2^2 + (\sqrt{2})^2 \rightarrow AP = \sqrt{6}$$

44. Resposta (A)

Sabendo que o volume do prisma hexagonal regular V_h é igual ao volume do prisma triangular regular V_t , que suas arestas medem, respectivamente, h e t e que ambos os sólidos possuem a mesma altura, temos que:

$$\begin{aligned} V_h &= V_t \\ 6 \cdot \left(\frac{h^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \right) \cdot h &= \frac{t^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot h \\ 6 \cdot h^2 &= t^2 \\ \frac{h^2}{t^2} &= \frac{1}{6} \\ \frac{h}{t} &= \frac{1}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

45. Resposta (C)

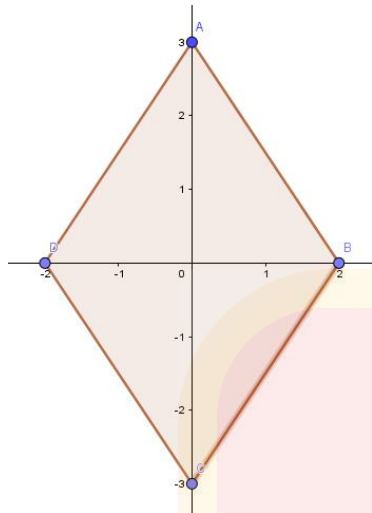
O quadrilátero tem vértices nos pontos onde a elipse corta os eixos.

Pontos onde a elipse corta o eixo y têm coordenadas $x = 0$:

$$\frac{0^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \rightarrow \frac{y^2}{9} = 1 \rightarrow y^2 = 9 \rightarrow y = \pm 3$$

Pontos onde a elipse corta o eixo x têm coordenadas $y = 0$:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{0}{9} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{4} = 1 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

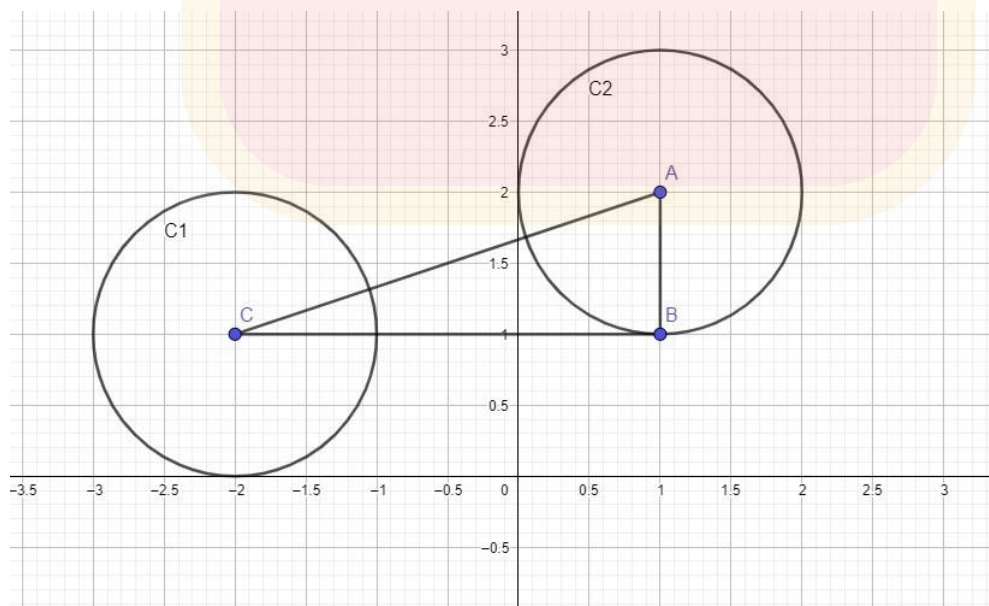


O quadrilátero ABCD é um losango com diagonais iguais a 4 e 6.

A área do losango ABCD é $A = \frac{4 \times 6}{2} = 12$

46. Resposta (E)

Esboçando no plano cartesiano as circunferências $C_1: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$, de centro $(1, 2)$ e raio 1, e a circunferência $C_2: (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$, de centro $(-2, 1)$ e raio 1, temos:



Note que a menor distância entre as circunferências é a medida da hipotenusa do triângulo retângulo menos a medida dos dois raios.

Determinando AC, temos que:

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \rightarrow (AC)^2 = (1)^2 + (3)^2 \rightarrow$$

Assim,
 $AC - 2.R = \sqrt{10} - 2$

47. Resposta (D)

$$\text{Área círculo grande} = \pi \times 20^2 = 400\pi$$

$$2(\text{Área círculo pequeno}) = 2 \times \pi \times 10^2 = 200\pi$$

$$Prob = \frac{\text{quero}}{\text{tenho}} = \frac{\text{Área círculo grande} - 2(\text{Área círculo pequeno})}{\text{Área círculo grande}} = \frac{400\pi - 200\pi}{400\pi} = \frac{200\pi}{400\pi} = \frac{1}{2}$$

48. Resposta (B)

Como a questão pede que a esfera número 8 seja pelo menos a terceira retirada tem-se que ela pode ser a primeira, a segunda ou a terceira a ser retirada.

$$\text{Fixando a esfera 8 como sendo a primeira a ser retirada: } 1 \times 31 \times 30 = 930.$$

O número de maneiras da esfera 8 ser a segunda ou a terceira a ser retirada é igual a 930 também. Basta então multiplicar 930 por 3.

$$9 \times 930 = 2790$$

49. Resposta (E)

A média aritmética das idades é a soma das idades dividida pela quantidade de pessoas no grupo (sendo S a soma das idades dos 10 amigos):

$$\frac{S}{10} = 22 \rightarrow S = 220$$

Ao ingressar um novo amigo de idade x tem-se um grupo de 11 amigos e uma nova média igual a 23:

$$\frac{S + x}{11} = 23 \rightarrow \frac{220 + x}{11} = 23 \rightarrow 220 + x = 253 \rightarrow x = 253 - 220 \rightarrow x = 33$$

50. Resposta (B)

I. Falsa

A taxa de analfabetismos não reduziu nem 50%, no período apresentado

II. Correta

A redução entre 2009 e 2011 é maior que um intervalo na horizontal enquanto a taxa de redução entre 2012 e 2015 está dentro de um intervalo na horizontal.

III. Falsa

Há um aumento de 2011 para 2012.

